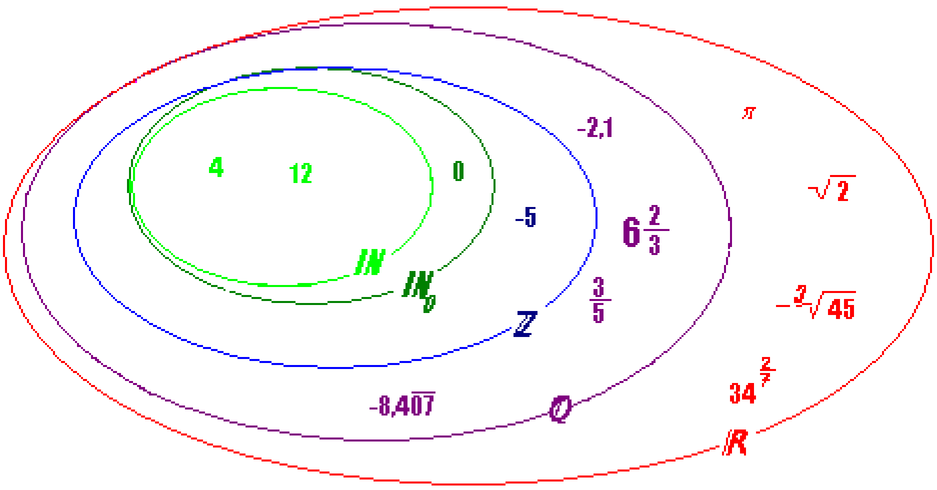
@ GN – GRUNDWISSEN MATHEMATIK

G8
für die **Jahrgangsstufe 9**

1 Zahlmengen

1. Reelle Zahlen $\mathbb{R}$:



natürliche Zahlen ($\mathbb{N}$)
0
negative ganze Zahlen
→ ganze Zahlen ($\mathbb{Z}$)

ganze Zahlen ($\mathbb{Z}$)
Abbrechende und nichtabbrechende periodische Dezimalzahlen (Bruchzahlen)
→ rationale Zahlen ($\mathbb{Q}$)

rationale Zahlen ($\mathbb{Q}$)
nichtabbrechende nichtperiodische Dezimalzahlen (irrationale Zahlen)
→ reelle Zahlen ($\mathbb{R}$)

Jedem Punkt auf der Zahlengeraden entspricht genau eine reelle Zahl. Jede reelle Zahl kann beliebig gut mit Hilfe rationaler Zahlen angenähert werden.

2. Wurzeln:

a) Für $a \in \mathbb{R}_0^+$ ist $\sqrt{a}$ („**(Quadrat-)Wurzel aus a**“) diejenige, nicht negative Zahl, die die Gleichung $x^2 = a$ löst. a heißt **Radikand.**
Es gilt: $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$.

Beispiele: $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{-36} =$ nicht definiert.

b) Ebenso gilt für $a \in \mathbb{R}_0^+$: die $\sqrt[n]{a}$ („**n-te Wurzel aus a**“) ist diejenige, nicht negative Zahl, die die Gleichung $x^n = a$ löst. n ist der **Wurzelexponent**.
Es gilt: $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$

Beispiele: $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$; $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$; $\sqrt[5]{(-32)} =$ nicht definiert.

c) Die Lösungsmenge der Gleichung $x^n = a$ für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

	n gerade	n ungerade
$a > 0$	$L = \{\sqrt[n]{a}; (-\sqrt[n]{a})\}$	$L = \{(\sqrt[n]{a})\}$
$a = 0$	$L = \{0\}$	$L = \{0\}$
$a < 0$	$L = \emptyset$	$L = \{; (-\sqrt[n]{(-a)})\}$

Beispiele:

- $x^4 = 81$: $L = \{-3; 3\}$
- $x^5 = -32$: $L = \{-2\}$
- $x^4 = -16$: $L = \{\}$

d) Rechnen mit Wurzeln ($n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, $m \in \mathbb{Q}$):

- $c\sqrt[n]{a} + d\sqrt[n]{a} = (c+d)\sqrt[n]{a}$
  $c\sqrt[n]{a} - d\sqrt[n]{a} = (c-d)\sqrt[n]{a}$

Beispiel:
$$7\sqrt[5]{32} + 3\sqrt[5]{32} = (7+3)\sqrt[5]{32} = 10 \cdot 2 = 20$$
$$7\sqrt[5]{32} + 3\sqrt[5]{32} = 7 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 20$$

- Wurzelziehen und Punktrechenarten sind vertauschbar:

  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

  Beispiel: $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{8 \cdot 2} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ für $b \in \mathbb{R}^+$

  Beispiel: $\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[3]{\frac{250}{16}} = \sqrt[3]{\frac{125 \cdot 2}{8 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{2}\right)^3} = \frac{5}{2}$

- $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

  Beispiel: $\sqrt[4]{16^{-5}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^{-5} = \left(\sqrt[4]{2^4}\right)^{-5} = 2^{-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

e) Teilweises Radizieren (Wurzelziehen):

$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$

f) Den Nenner rational machen, d.h. erweitere den Bruch so, dass der Nenner rational ist:

Beispiel: $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3. Potenzen: (vgl. Grundwissen 8.1)

a) Definition:

Für $a \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, insbesondere $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Beispiele: ($a \in \mathbb{R}^+$)

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[4]{2^8} = 2^{\frac{8}{4}} = 2^2 = 4$; $32^{-0,2} = 32^{\frac{-1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

b) Potenzgesetze:

Es gelten die bekannten Potenzgesetze: $a, b \in \mathbb{R}^+$, $m, p \in \mathbb{Z}$, $n, q \in \mathbb{N}$

- $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ Beispiel: $7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = 7^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{7^5}$
- $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$ Beispiel: $7^{\frac{1}{3}} : 7^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = 7^{\frac{-1}{6}} = \sqrt[6]{\frac{1}{7}}$
- $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$ Beispiel: $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{5}} = 3^{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}} = 3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$
- $a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{n}{m}}$ Beispiel: $5^{\frac{1}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{3}} = (5 \cdot 25)^{\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3}} = 5$
- $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = (a : b)^{\frac{m}{n}}$ Beispiel: $16^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{3}} = (16 : 2)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$

2 Funktionen

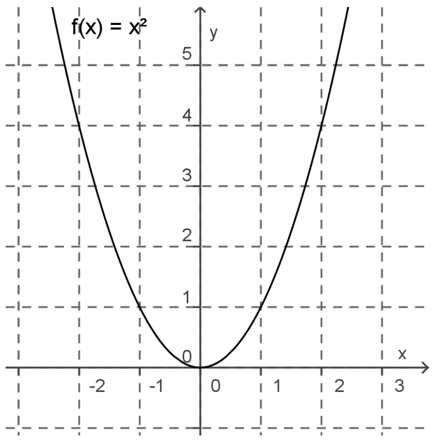
1. Binomische Formeln: $a, b \in \mathbb{R}$

„Plus-Formel“: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

„Minus-Formel“: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

„Plus-Minus-Formel“: $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

2. Quadratische Funktionen:



Jede Funktion der Form $f: f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ nennt man **quadratische Funktion**. Ihr Graph ist eine **Parabel**.

Der Graph der quadratischen Funktion $f: f(x) = x^2$ heißt **Normalparabel**.

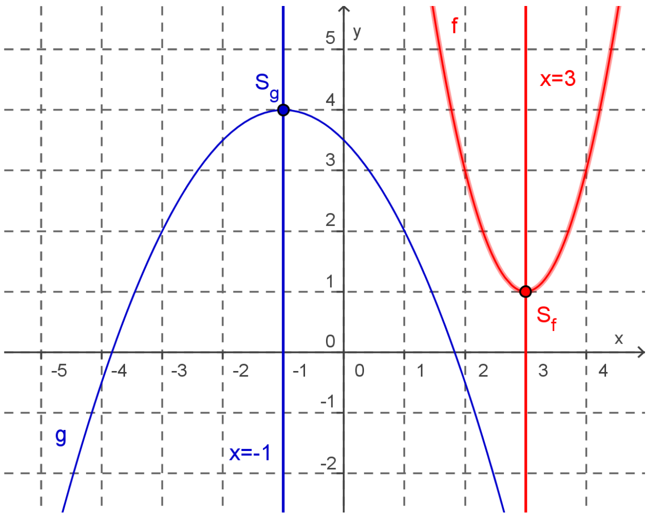
Für eine Parabel gilt:

- $a > 0$: die Parabel ist nach oben geöffnet.
  $a < 0$: die Parabel ist nach unten geöffnet.
- $|a| > 1$: die Parabel ist schmaler als die Normalparabel.
  $0 < |a| < 1$: die Parabel ist breiter als die Normalparabel.
- Die Parabel ist symmetrisch bzgl. einer zur y-Achse parallelen Geraden. Der Schnittpunkt der Symmetrieachse mit der Parabel heißt **Scheitel**. Die x-Koordinate des Scheitels ist zugleich Minimum $(a > 0)$ bzw. Maximum $(a < 0)$ der quadratischen Funktion.

Beispiele:

- $f: \ f(x)=2x^2-12x+19$ ist eine nach oben geöffnete Parabel, die schmaler als die Normalparabel ist. ($2>0$ und $|2|>1$)

- $g: \ g(x)=-\frac{1}{2}x^2-x+3{,}5$ ist eine nach unten geöffnete Parabel, die breiter als die Normalparabel ist. ($-\frac{1}{2}<0$ und $\left|-\frac{1}{2}\right|<1$)



Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung lässt sich jede quadratische Funktion in die **Scheitelform** $f(x) = a(x-d)^2+e$ bringen. Aus ihr lässt sich der **Scheitel** $S(d|e)$ und die Symmetrieachse $a: \ x=d$ besonders leicht ablesen.

Beispiele für die Bestimmung der Scheitelform:

$f(x) = 2x^2-12+19$ $= 2[x^2-6x]+19$	Den Parameter a vor dem x^2 bei allen Gliedern mit Faktor x ausklammern.
$= 2\left[x^2-2\cdot x\cdot 3+\overbrace{3^2-3^2}^{=0}\right]+19$	Die quadratische Ergänzung durchführen.
$= 2\left[(x-3)^2-9\right]+19$	Die binomische Formel anwenden.
$= 2(x-3)^2-18+19$ $= 2(x-3)^2+1$	Die eckige Klammer auflösen und den Term vereinfachen.

f besitzt also den Scheitel $S_f(3|1)$ und die Symmetrieachse $a: \ x=3$.

Ebenso gilt:

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{2}x^2 - x + 3{,}5 \\ &= -\frac{1}{2}\left[x^2 + 2x\right] + 3{,}5 \\ &= -\frac{1}{2}\left[x^2 + 2\cdot x\cdot 1 + 1^2 - 1^2\right] + 3{,}5 \\ &= -\frac{1}{2}\left[(x+1)^2 - 1\right] + 3{,}5 \\ &= -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2} + 3{,}5 \\ &= -\frac{1}{2}(x-(-1))^2 + 4 \end{aligned}$$

Der Scheitel ist $S_g(-1|4)$ und die Symmetrieachse $a:\ x=-1$.

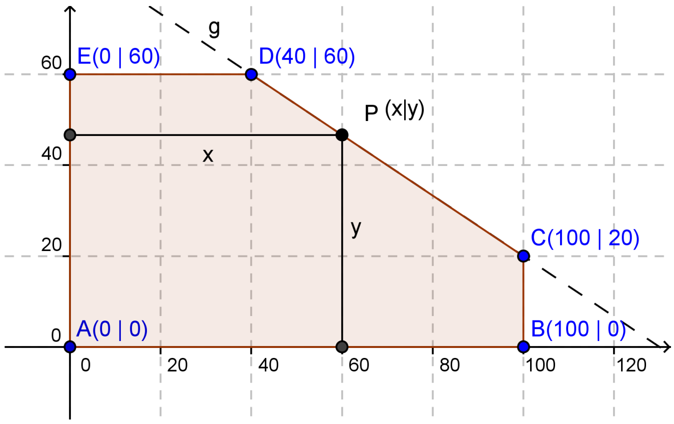
Die **Nullstellen einer quadratischen Funktion** lassen sich durch Lösung der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ bestimmen (siehe 3).

2. Extremwertaufgaben

Gesucht ist die x-Koordinate mit dem größten oder kleinsten Funktionsterm, z.B. der größte Gewinn, der kleinste Verlust, die größte Fläche.

Beispiel:

a) Von einer rechteckigen Holzplatte der Größe 100cm mal 60cm ist eine Ecke gradlinig abgebrochen. Aus der noch bestehenden Holzplatte soll eine flächenmäßig möglichst große rechteckige Holzplatte gewonnen werden.



Das flächenmäßig größte Rechteck mit maximaler Breite reicht bis D, das Rechteck mit der größten Länge reicht bis C. Möglicherweise hat aber ein dazwischenliegendes Rechteck einen größeren Flächeninhalt. Man betrachtet also nur x-Werte aus dem Intervall I = [40;100].

Die Koordinaten von P errechnen sich aus der Geradengleichung für g:

$$m = \frac{20-60}{100-40} = \frac{-40}{60} = -\frac{2}{3}$$

$$20 = \frac{-2}{3}\cdot 100 + t \quad \Big| + \frac{200}{3}$$

$$\frac{260}{3} = t$$

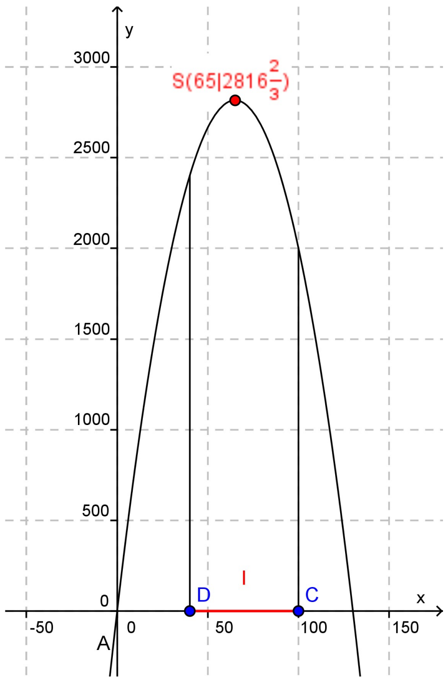
Also $y = -\frac{2}{3}\cdot x + \frac{260}{3}$.

Für den Flächeninhalt dieses Rechtecks gilt:

$$A = x\,\text{cm}\cdot y\,\text{cm} = x\,\text{cm}\cdot\left(-\frac{2}{3}x + \frac{260}{3}\right)\text{cm} = \left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{260}{3}x\right)\text{cm}^2 .$$

Dies ist eine nach unten geöffnete Parabel, die ihren maximalen Wert also an ihrem Scheitel hat.

$$\begin{aligned} A &= \left[-\frac{2}{3}x^2 + \frac{260}{3}x\right]\text{cm}^2 \\ &= \left[-\frac{2}{3}\left(x^2 - 130x\right)\right]\text{cm}^2 \\ &= \left[-\frac{2}{3}\left(x^2 - 2\cdot x\cdot 65 + 4225 - 4225\right)\right]\text{cm}^2 \\ &= \left[-\frac{2}{3}\left((x-65)^2 - 4225\right)\right]\text{cm}^2 \\ &= \left[-\frac{2}{3}(x-65)^2 + 2816\frac{2}{3}\right]\text{cm}^2 \end{aligned}$$

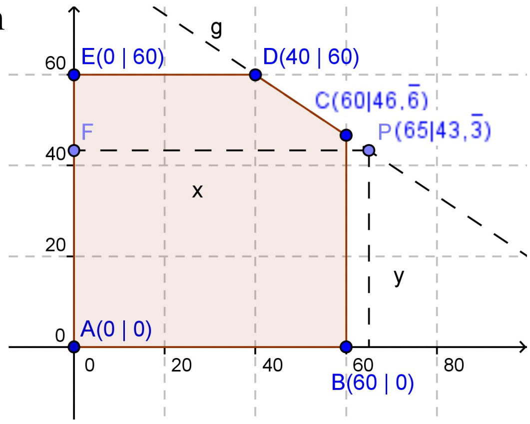


Den maximalen Flächeninhalt hat das Rechteck also für eine Länge von $x\,\text{cm} = 65\,\text{cm}$. Die dazugehörige Breite ist

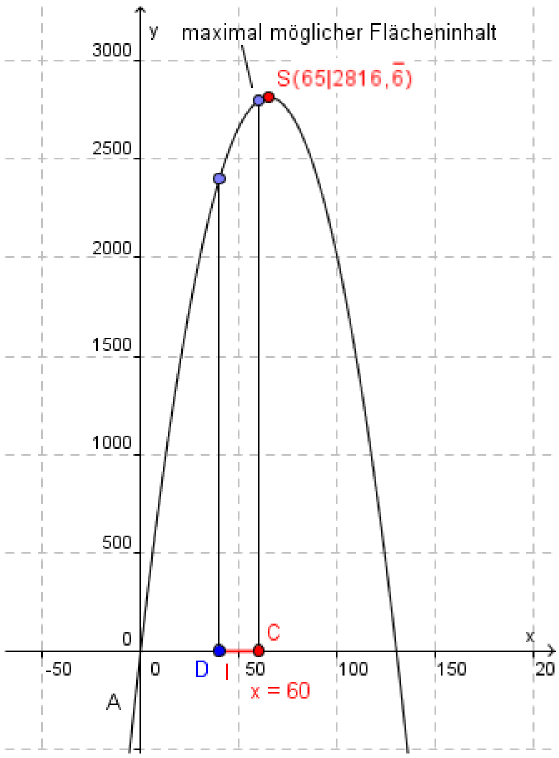
$$y\,\text{cm} = \left(-\frac{2}{3}\cdot 65 + \frac{260}{3}\right)\text{cm} = \frac{130}{3}\text{cm} = 43\frac{1}{3}\text{cm}$$

Der Flächeninhalt beträgt dann $2816\frac{2}{3}\text{cm}^2$.

b) Ändert man die Maße der ursprünglichen Holzplatte auf (60 cm mal 60 cm) bei gleicher Bruchkante, so verändert sich das Intervall der möglichen x-Werte auf I = [40;60].



Die Gleichung der Geraden g bleibt gleich, damit auch die Berechnung des Flächeninhalts.



Das oben berechnete Maximum $x=65\notin I$ kann aber keine Lösung sein. Es muss der x-Wert genommen werden, der dem Maximum am nächsten kommt: x = 60.

Der maximale Flächeninhalt beträgt damit

$$A = 60\,\text{cm}\cdot 46\frac{2}{3}\,\text{cm} = 2800\,\text{cm}^2.$$

3 Gleichungen

1. Quadratische Gleichungen:

Jede Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ besitzt abhängig von der **Diskriminante** $D = b^2 - 4ac$ die folgenden Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

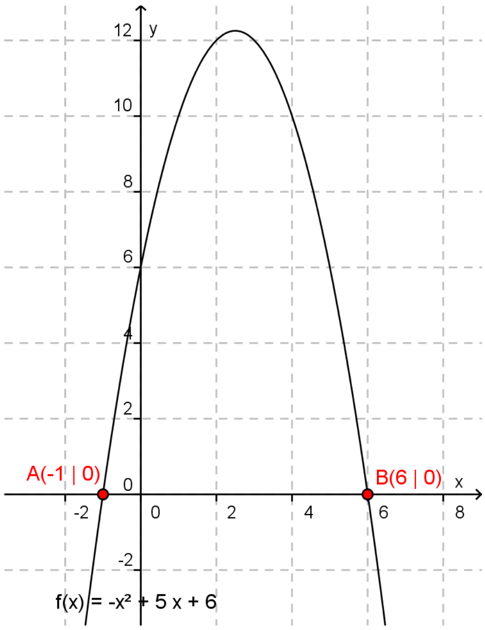
Es gilt:

a) $D > 0$: Die quadratische Gleichung besitzt zwei verschiedene Lösungen.

Beispiel:

$-x^2 + 5x + 6 = 0$, also $a = -1$, $b = 5$ und $c = 6$.

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6 \\ &= 49 > 0 \end{aligned}$$



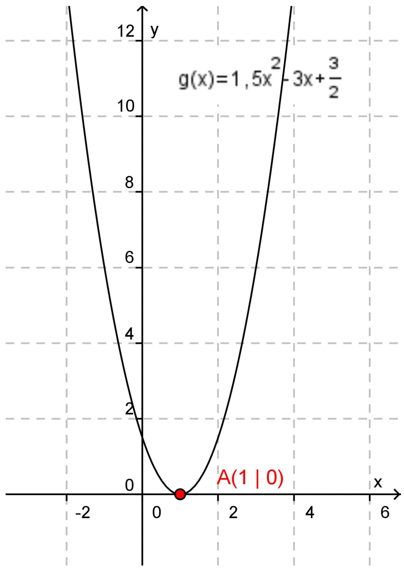
$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{-2} = -\frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = -\frac{-5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = -\frac{-5+7}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{-5-7}{2} = -\frac{-12}{2} = 6$$

$L = \{-1; 6\}$

Die dazugehörige Parabel besitzt zwei Schnittpunkte mit der x-Achse. Die x-Koordinaten der beiden Schnittpunkte sind die zwei Lösungen der quadratischen Gleichung.

b) $D=0$: Die quadratische Gleichung besitzt genau eine Lösung.



Beispiel:

$1{,}5\,x^2 - 3x + \frac{3}{2} = 0$, also $a=1{,}5$, $b=-3$ und $c=\frac{3}{2}$.

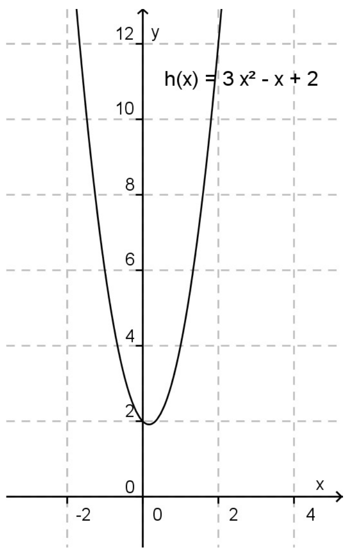
$$
\begin{aligned}
D &= (-3)^2 - 4\cdot 1{,}5\cdot\frac{3}{2}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm\sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1{,}5\cdot\frac{3}{2}}}{2\cdot 1{,}5} = \frac{3 \pm \sqrt{9-9}}{3} = \frac{3\pm 0}{3} = 1$$

$L=\{1\}$

Die dazugehörige Parabel besitzt einen Schnittpunkt mit der x-Achse.

c) $D<0$: Die quadratische Gleichung hat keine Lösung, da $\sqrt{D}\notin\mathbb{R}$ ist.



Beispiel:

$3x^2 - x + 2 = 0$

$$
\begin{aligned}
D &= (-1)^2 - 4\cdot 3\cdot 2\\
&= -23 < 0
\end{aligned}
$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm\sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3} = \frac{1\pm\sqrt{1-24}}{6} = \frac{1\pm\sqrt{-23}}{6} \notin\mathbb{R}$$

Die dazugehörige Parabel besitzt keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.

2. Schnittprobleme:

Gegeben sind die Funktionen $f:\ f(x)=x+2,\ D_f=\mathbb{R}$ und $g:\ g(x)=\frac{2x-11}{x-4},\ D_g=\mathbb{R}\setminus\{4\}$. Bestimme die Schnittpunkte ihrer Funktionsgraphen!

Einen Schnittpunkt kann es nur innerhalb der Schnittmenge beider Definitionsmengen geben, also innerhalb der Menge $D=\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

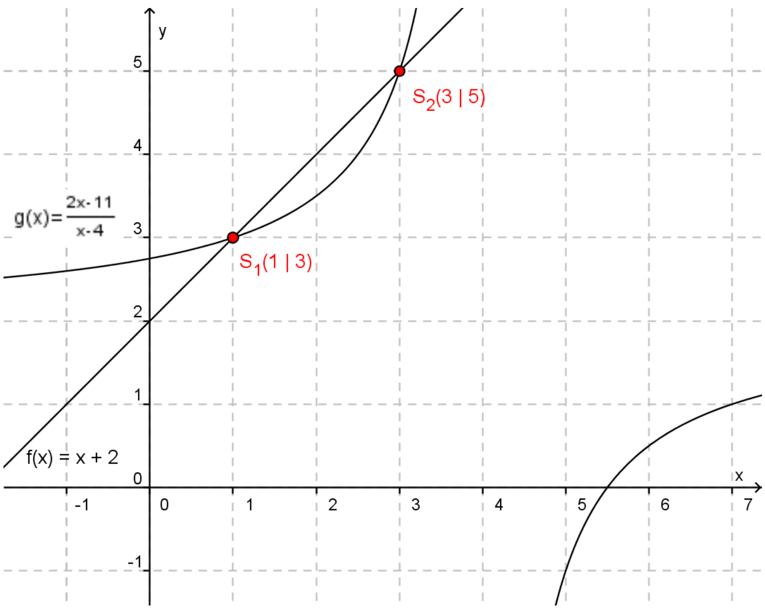
Da die Funktionswerte von f und g gleich sind, wenn sich die Graphen schneiden, können beide Funktionsterme gleichgesetzt werden:

$$\begin{aligned} x+2 &= \frac{2x-11}{x-4} \quad |\cdot(x-4) \\ (x+2)(x-4) &= 2x-11 \\ x^2-2x-8 &= 2x-11 \quad |-2x+11 \\ x^2-4x+3 &= 0 \end{aligned}$$

Für die Lösungen der quadratischen Gleichung ergeben sich folgende Formeln:

$$x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1} = \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{4\pm2}{2}$$

Somit sind $x_1=\frac{4-2}{2}=1\in D$ und $x_2=\frac{4+2}{2}=3\in D$ die x-Koordinaten der beiden Schnittpunkte. Die y-Koordinaten der Schnittpunkte erhält man durch Einsetzen der x-Koordinaten in einen der Funktionsterme:



$f(1) = 1+2 = 3$

also $S_1(1|3)$

$f(3) = 3+2 = 5$

also $S_2(3|5)$

In anderen Fällen haben die Funktionsgraphen nur einen oder überhaupt keinen Schnittpunkt (erkennbar an der Diskriminante).

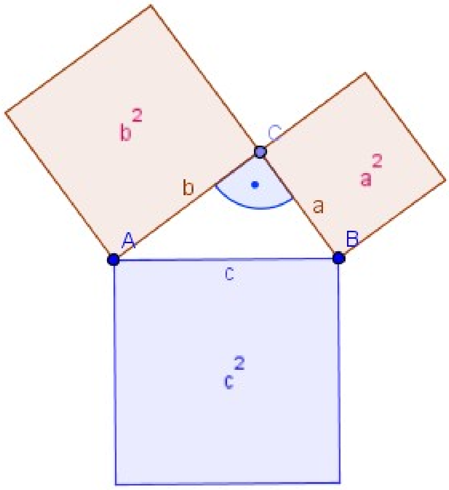
4 Geometrie des rechtwinkligen Dreiecks

1. Pythagoras:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

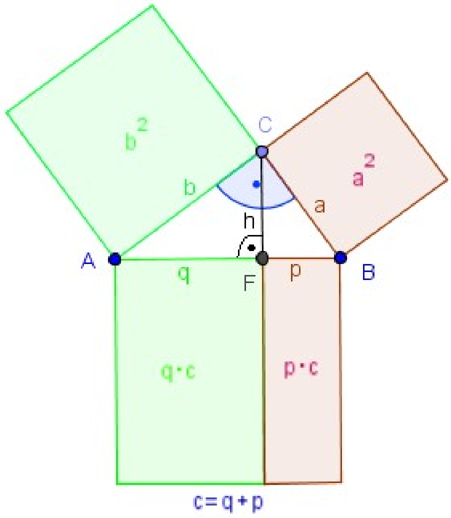
Umgekehrt gilt für jedes Dreieck, bei dem die Seitenlängen diese Gleichung erfüllen, dass es rechtwinklig ist.



2. Kathetensatz:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathete gleich dem Produkt der Hypotenuse und des zur Kathete gehörenden Hypotenusenabschnitts:

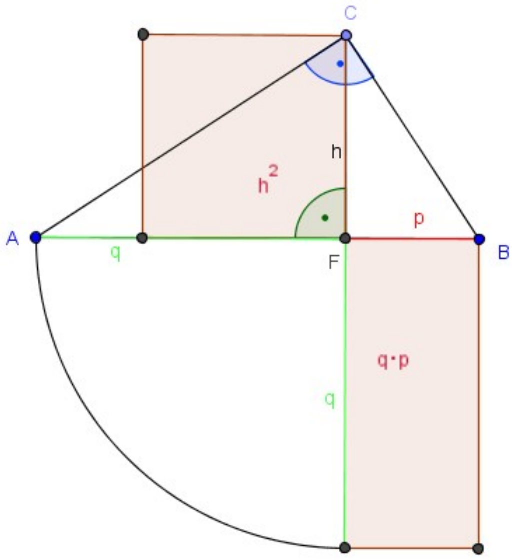
$$a^2 = p \cdot c \quad \text{und} \quad b^2 = q \cdot c$$



3. Höhensatz:

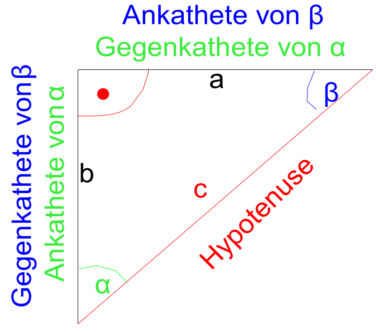
In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Höhe über der Hypotenuse gleich dem Produkt der Hypotenusenabschnitte:

$$h^2 = q \cdot p$$



4. Sinus, Kosinus und Tangens

a) Am **rechtwinkligen** Dreieck lassen sich die folgenden Verhältnisse für die beiden nicht rechten Winkel definieren:



Sinus eines Winkels $= \dfrac{\text{Gegenkathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}}$

$\sin(\alpha) = \dfrac{a}{c}$, $\sin(\beta) = \dfrac{b}{c}$

Kosinus eines Winkels $= \dfrac{\text{Ankathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}}$

$\cos(\alpha) = \dfrac{b}{c}$, $\cos(\beta) = \dfrac{a}{c}$

Tangens eines Winkels $= \dfrac{\text{Gegenkathete des Winkels}}{\text{Ankathete des Winkels}}$

$\tan(\alpha) = \dfrac{a}{b}$, $\tan(\beta) = \dfrac{b}{a}$

Die Werte einiger besonderer Winkel lauten:

Winkel α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	0	0,5	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0,5	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—

b) Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens

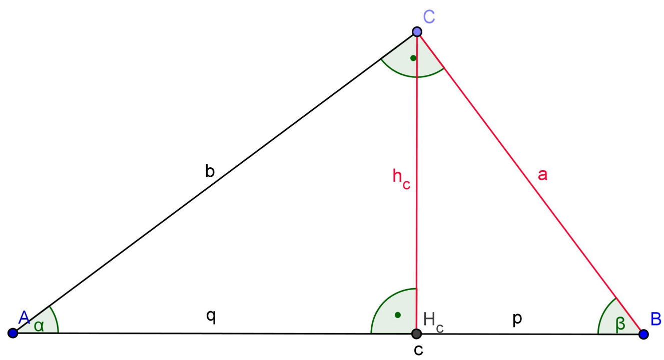
Da $\beta = 90° - \alpha$ ist, gilt:

- $\sin(\alpha) = \cos(\beta) = \cos(90° - \alpha)$ und $\cos(\alpha) = \sin(\beta) = \sin(90° - \alpha)$
- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
- $\tan(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\beta)} = \dfrac{1}{\tan(90° - \alpha)}$

5. Anwendungen:

a) Beispiel 1:

Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ΔABC $(\gamma = 90°)$ mit $a = 5\,\text{cm}$ und $h_c = 4\,\text{cm}$.



Bestimme b, c, p, q sowie α und β.

Nach dem Satz von Pythagoras gilt für das rechtwinklige Dreieck $\Delta H_c BC$:

$$\begin{aligned} a^2 &= h_c^2 + p^2 \\ 25\,\text{cm}^2 &= 16\,\text{cm}^2 + p^2 \quad |-16\,\text{cm}^2 \\ 9\,\text{cm}^2 &= p^2 \end{aligned}$$

Also $p = 3\,\text{cm}$.

Nach dem Höhensatz ergibt sich für das Dreieck ΔABC :

$$\begin{aligned} h_c^2 &= q \cdot p \\ 16\,\text{cm}^2 &= q \cdot 3\,\text{cm} \quad | :3\,\text{cm} \\ \frac{16}{3}\text{cm} &= q \\ 5\frac{1}{3}\text{cm} &= q \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich: $c = p+q = 3\text{cm} + \frac{16}{3}\text{cm} = \frac{25}{3}\text{cm} = 8\frac{1}{3}\text{cm}$.

Mit Hilfe des Kathetensatzes für Dreieck ΔABC lässt sich b ermitteln:

$$\begin{aligned} b^2 &= c \cdot q \\ b^2 &= \frac{25}{3}\text{cm} \cdot \frac{16}{3}\text{cm} \\ b^2 &= \frac{400}{9}\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Also $b = \frac{20}{3}\text{cm} = 6\frac{2}{3}\text{cm}$.

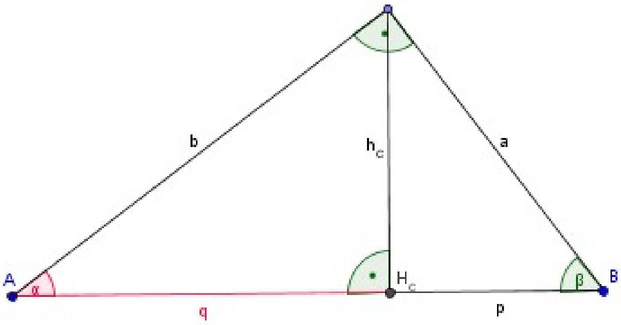
Zur Bestimmung von α :

$\tan(\alpha) = \frac{h_c}{q} = \frac{4\text{cm}}{5\frac{1}{3}\text{cm}} = 0{,}75$, also $\alpha \approx 37°$.

Damit gilt: $\beta = 90° - \alpha = 90° - 37° = 53°$.

b) Beispiel 2:

Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ΔABC ($\gamma = 90°$) mit $q = 5{,}3\,\text{cm}$ und $\alpha = 40°$.



Bestimme a, b, p, c, h_c und β !

Im rechtwinkligen Dreieck ΔABC gilt : $\beta = 90° - \alpha = 90° - 40° = 50°$

Zur Bestimmung von b betrachtet man das rechtwinklige Dreieck $\Delta A H_c C$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{q}{b} \\
\cos(40°) &= \frac{5{,}3\,\text{cm}}{b} && |\cdot b \\
b\cdot\cos(40°) &= 5{,}3\,\text{cm} && |:\cos(40°) \\
b &= \frac{5{,}3\,\text{cm}}{\cos(40°)} \\
b &\approx 6{,}9\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Für h_c gilt:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \frac{h_c}{b} \\
\sin(40°) &= \frac{h_c}{6{,}9\,\text{cm}} && |\cdot 6{,}9\,\text{cm} \\
\sin(40°)\cdot 6{,}9\,\text{cm} &= h_c \\
4{,}4\,\text{cm} &\approx h_c
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Kathetensatzes ergibt sich:

$$\begin{aligned}
b^2 &= q\cdot c \\
47{,}61\,\text{cm}^2 &= 5{,}3\,\text{cm}\cdot c && |:5{,}3\,\text{cm} \\
9{,}0\,\text{cm} &\approx c
\end{aligned}$$

Damit gilt: $p = c-q = 9\,\text{cm}-5{,}3\,\text{cm} = 3{,}7\,\text{cm}$

Für die Bestimmung von a kann der Satz von Pythagoras auf das rechtwinklige Dreieck ΔABC angewendet werden:

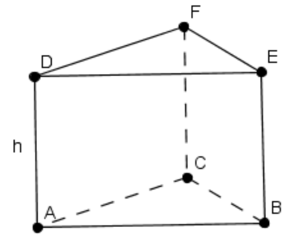
$$\begin{aligned}
c^2 &= a^2+b^2 \\
81\,\text{cm}^2 &= a^2+47{,}61\,\text{cm}^2 && |-47{,}61\,\text{cm}^2 \\
33{,}39\,\text{cm}^2 &= a^2
\end{aligned}$$

Also $a \approx 5{,}8\,\text{cm}$.

5 Raumgeometrie

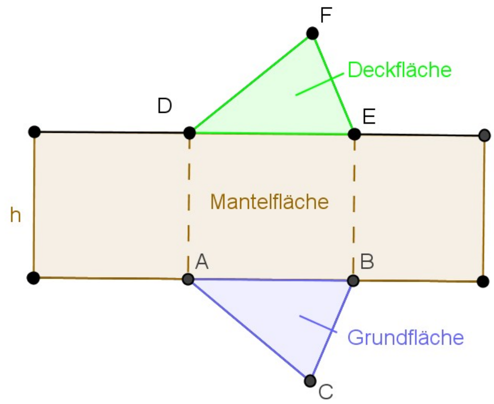
1. Das gerade Prisma:

Das Prisma besteht aus einer n-eckigen **Grundfläche** und einer dazu kongruenten **Deckfläche**, die in parallelen Ebenen liegen. Die **Mantelfläche** besteht beim geraden Prisma aus Rechtecken.
Der Quader ist ein spezielles Prisma.



Beispiel: Ein gerades Prisma mit dreieckiger Grundfläche.

Das Netz des Prismas ist damit:



$$\text{Volumen}_{Prisma} = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}_{Prisma} = G \cdot h$$

$$\text{Oberflächeninhalt}_{Prisma} = 2 \cdot \text{Grundfläche} + \text{Mantelfläche} = 2\text{G} + M$$

Beim geraden Prisma gilt:

$$\text{Mantelfläche}_{Prisma} = \text{Umfang der Grundfläche} \cdot \text{Höhe}_{Prisma} = U_G \cdot h$$

Beispiel:
Gegeben ist ein gerades Prisma mit dreieckiger Grundfläche. Die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $a = 7\,\text{cm}.$ Die Höhe des Prismas beträgt $h = 10\,\text{cm}.$
Bestimme den Oberflächeninhalt und das Volumen des Prismas.

Dazu muss der Flächeninhalt der Grundfläche ermittelt werden. Für die Höhe h_a eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a gilt : $h_a = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$.
Für den Flächeninhalt der Grundfläche gilt also:

$$G = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{3} = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} = \frac{1}{4} (7\text{cm})^2 \cdot \sqrt{3} \approx 21{,}22\,\text{cm}^2$$

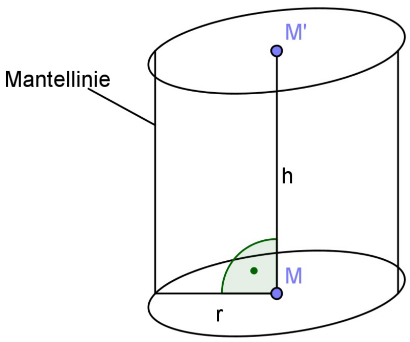
Daraus ergibt sich für das Prisma:

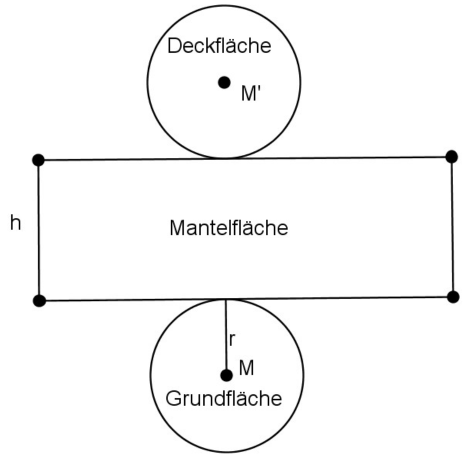
$$A_{Prisma} = 2G + M = 2 \cdot 21{,}22\,\text{cm}^2 + 3 \cdot 7\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} = 42{,}44\,\text{cm}^2 + 210\,\text{cm}^2 = 252{,}44\,\text{cm}^2$$

$$V_{Prisma} = G \cdot h = 21{,}22\,\text{cm}^2 \cdot 10\text{cm} = 212{,}2\,\text{cm}^3$$

2. **Der gerade Kreiszylinder:**

Grund- und Deckfläche sind Kreise mit gleichem Radius r. h ist die Höhe des Zylinders. Beim <u>geraden</u> Zylinder ist jede Mantellinie genauso lang wie die Höhe des Zylinders.





$$\text{Volumen}_{Zylinder} = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$$

Oberflächeninhalt des geraden Kreiszylinders:

$$\text{Oberflächeninhalt}_{Zylinder} = 2 \cdot \text{Grundfläche} + \text{Mantelfläche} = 2G + M = 2 \cdot (\pi r^2) + 2\pi r \cdot h$$

Beispiel:
Gegeben ist ein gerader Kreiszylinder, dessen Volumen $V = 4712{,}39\,\text{cm}^3$ beträgt und für dessen Höhe h und Radius r gilt: $h = 1{,}5 \cdot r$.
Bestimme seinen Radius r, seine Höhe h und seinen Oberflächeninhalt A.

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 \cdot h \\ V &= \pi r^2 \cdot 1{,}5\, r \\ 4712{,}39\,\mathrm{cm}^3 &= 1{,}5\,\pi \cdot r^3 \quad | :(1{,}5\,\pi) \\ 1000\,\mathrm{cm}^3 &\approx r^3 \end{aligned}$$

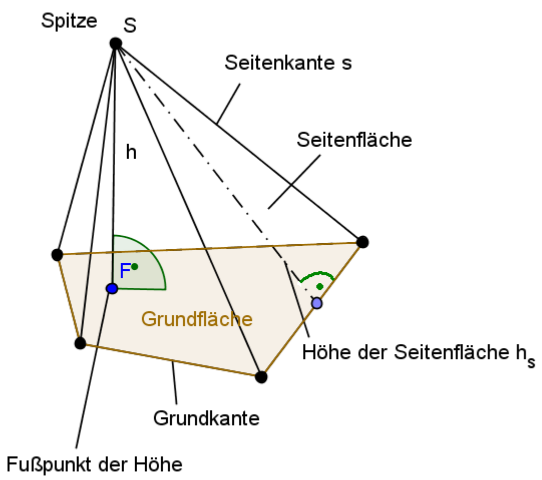
Somit ist $r = 10\,\mathrm{cm}$ und $h = 1{,}5 \cdot r = 1{,}5 \cdot 10\mathrm{cm} = 15\mathrm{cm}.$

Für die Oberfläche des Zylinders gilt:

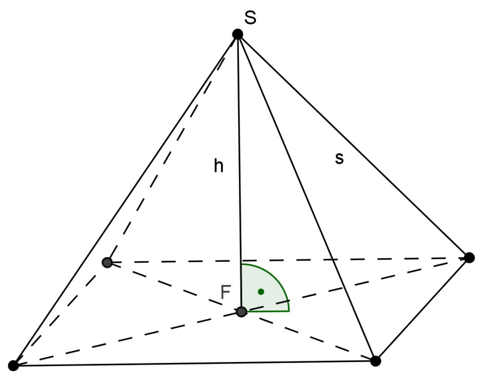
$$A = 2 \cdot (\pi r^2) + 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot (10\mathrm{cm})^2 + 2\pi \cdot 10\mathrm{cm} \cdot 15\mathrm{cm}$$
$$\approx 628{,}32\,\mathrm{cm}^2 + 942{,}48\,\mathrm{cm}^2 = 1570{,}8\,\mathrm{cm}^2$$

3. Die Pyramide:

Die Pyramide besteht aus einer n-eckigen Grundfläche und n dreieckigen Seitenflächen. Die Seitenflächen bilden zusammen den Mantel. Sind alle Seitenkanten gleich lang, so heißt die Pyramide **gerade**.



Beispiel einer schiefen Pyramide



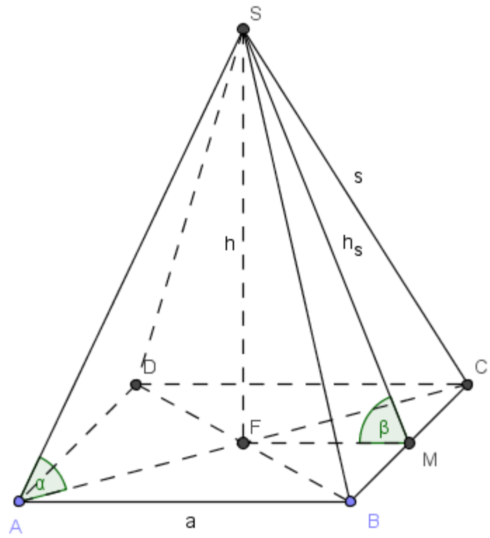
Beispiel einer geraden Pyramide

$$\text{Volumen}_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$$

$$\text{Oberflächeninhalt}_{Pyramid} = \text{Grundfläche} + \text{Mantelfläche}$$

Beispiel:

Gegeben ist eine gerade Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche der Grundkantenlänge $a=8\text{cm}$ und einem Winkel $\alpha=70°$.



Bestimme die Höhe h, das Volumen V, den Oberflächeninhalt A der Pyramide und den Winkel β.

Da es sich um eine gerade Pyramide handelt ist der Fußpunkt F der Höhe der Pyramide zugleich der Schnittpunkt der beiden Diagonalen der Grundfläche.
Für die Diagonale der Grundfläche gilt (Satz von Pythagoras):

$\overline{AC}^2 = 2\cdot a^2 = 2\cdot(8\text{cm})^2 = 128\,cm^2$ also $\overline{AC} \approx 11{,}3\,\text{cm}$ und damit

$$\overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 5{,}65\,\text{cm}\ .$$

Das Dreieck ΔAFS hat bei F einen rechten Winkel (Höhe). Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{\overline{AF}}{\overline{AS}} \\
\cos(70°) &= \frac{5{,}65\,\text{cm}}{\overline{AS}} \quad |\cdot\overline{AS} : \cos(70°) \\
\overline{AS} &= \frac{5{,}65\,\text{cm}}{\cos(70°)} \\
\overline{AS} &\approx 16{,}5\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Da die Pyramide gerade ist, sind alle Seitenkantenlängen gleich $s=\overline{AS}=16{,}5\,\text{cm}$.

Für die Höhe gilt dann: $h = s\cdot\sin(\alpha) = 16{,}5\,\text{cm}\cdot\sin(70°) = 15{,}5\,\text{cm}$

Für das Volumen der Pyramide gilt:

$$V = \frac{1}{3}G\,h = \frac{1}{3}(8\text{cm})^2\cdot 15{,}5\,\text{cm} \approx 330{,}7\,\text{cm}^3$$

Zur Bestimmung von β betrachte das rechtwinklige Dreieck ΔFMS:

Es gilt: $\overline{FM} = \frac{1}{2}a = 4\,\text{cm}$.

$$\tan(\beta) = \frac{h}{\overline{FM}} = \frac{15{,}5\,\text{cm}}{4\text{cm}} = 3{,}875 \quad \text{also} \quad \beta \approx 75{,}5°.$$

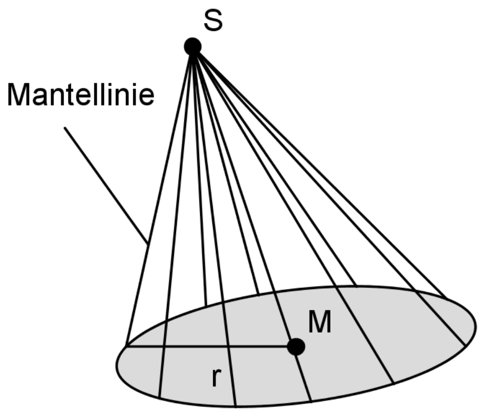
Zur Bestimmung des Oberflächeninhalts benötigt man den Flächeninhalt der dreieckigen Seitenflächen und deshalb deren Höhe h_s (Satz des Pythagoras):

$$h_s^2 = h^2 + \overline{FM}^2 = (15{,}5\,\text{cm})^2 + (4\text{cm})^2 = 256{,}25\,\text{cm}^2 \quad \text{also} \quad h_s \approx 16{,}0\,\text{cm}.$$

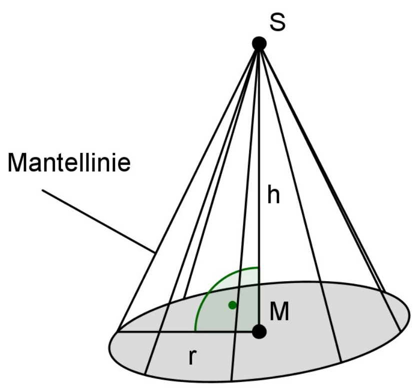
Damit gilt für A:

$$A = G + 4\cdot\left(\frac{1}{2}a\cdot h_s\right) = (8\text{cm})^2 + 4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 8\text{cm}\cdot 16\text{cm}\right) = 64\,\text{cm}^2 + 256\,\text{cm}^2 = 320\,\text{cm}^2$$

4. Der Kreiskegel:



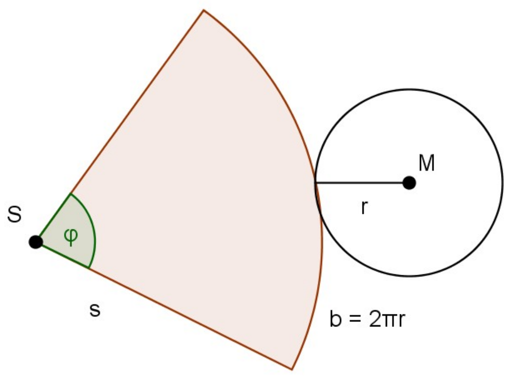
Beispiel für einen schiefen Kreiskegel



Beispiel für einen geraden Kreiskegel

$$\text{Volumen}_{Kreiszylinder} = \frac{1}{3}\cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{3}Gh$$

Der gerade Kreiskegel hat einen Kreis (Radiuslänge r) als Grundfläche und einen Kreissektor als Mantelfläche.



Für den geraden Kreiszylinder gilt:

$b = \frac{\varphi}{360°} \cdot 2\pi s$ und damit

$$M = \frac{\varphi \cdot \pi s^2}{360°} = s \cdot \frac{b}{2} = \pi r s$$

$$\text{Oberflächeninhalt}_{\textit{gerader Kreiszylinder}} = \text{Grundfläche} + \text{Mantelfläche} = \pi r^2 + \pi r s$$

Beispiel:

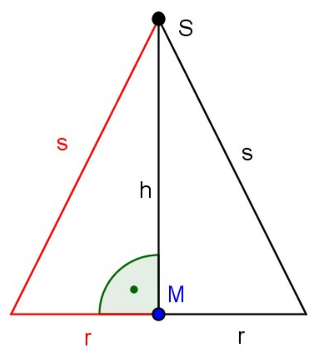
Gegeben ist ein gerader Kreiskegel mit Radius $r = 6\,\text{cm}$ und Mantellinie $s = 9\,\text{cm}$.

Bestimme das Volumen V, den Oberflächeninhalt A und den Winkel φ.

$$b = 2\pi r = 2\pi \cdot 6\text{cm} \approx 37{,}7\,\text{cm}$$

Es gilt:

$$\frac{\varphi}{360°} = \frac{b}{2\pi s}$$
$$\frac{\varphi}{360°} = \frac{2\pi r}{2\pi s} \quad | \cdot 360°$$
$$\varphi = \frac{r}{s} \cdot 360°$$
$$\varphi = \frac{6\text{cm}}{9\text{cm}} \cdot 360°$$
$$\varphi = 240°$$



Der senkrechte Schnitt durch das Zentrum des Kegels ist ein gleichschenkliges Dreieck. Seine Höhe ist die Höhe des Kegels. Mit dem Satz von Pythagoras gilt:

$h^2 = s^2 - r^2 = (9\text{cm})^2 - (6\text{cm})^2 = 45\,\text{cm}^2$ also $h \approx 6{,}7\,\text{cm}$.

Damit gilt für das Volumen:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \;=\; \frac{1}{3}\pi \cdot (6\text{cm})^2 \cdot 6{,}7\,\text{cm} \;=\; 252{,}6\,\text{cm}^3$$

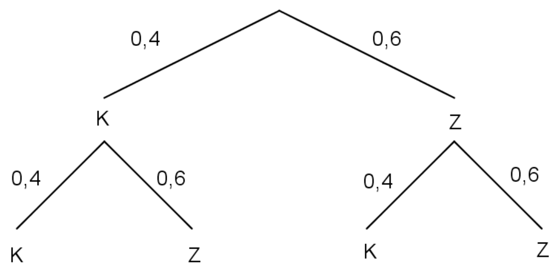
Für den Oberflächeninhalt:

$$A \;=\; \pi r^2 + \pi r s \;=\; \pi \cdot (6\text{cm})^2 + \pi \cdot 6\text{cm} \cdot 9\text{cm} \;\approx\; 113{,}1\,\text{cm}^2 + 169{,}6\,\text{cm}^2 \;=\; 282{,}7\,\text{cm}^2$$

6 Stochastik

1. **Mehrstufige Zufallsexperimente**
   Ein Zufallsexperiment (vgl. Grundwissen Klasse 8.7) kann aus mehreren Schritten bestehen, beispielsweise indem ein Würfel mehrmals geworfen wird. Man spricht von einem **mehrstufigen Zufallsexperiment**. Man kann dies in einem Baumdiagramm darstellen. Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten des nächsten Schritts werden dabei an die Kanten geschrieben.

   Beispiel:
   Das zweimalige Werfen einer gezinkten Münze. K (Kopf) tritt mit 40% Wahrscheinlichkeit ein, Z (Zahl) mit 60%.
   Die Ergebnismenge ist damit
   $\Omega = \{KK\,,KZ\,,ZK\,,ZZ\}$



2. **Pfadregeln**:

   a) Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ergebnisses berechnet man, indem man das **Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs der Kanten zu diesem Ergebnis** bildet.
   Für das Beispiel der Münze gilt:

   $$P(\text{„}KK\text{“}) = 0{,}4\cdot 0{,}4 = 0{,}16$$

   $$P(\text{„}KZ\text{“}) = 0{,}4\cdot 0{,}6 = 0{,}24$$

   $$P(\text{„}ZK\text{“}) = 0{,}6\cdot 0{,}4 = 0{,}24$$

   $$P(\text{„}ZZ\text{“}) = 0{,}6\cdot 0{,}6 = 0{,}36$$

   b) Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die **Summe der Wahrscheinlichkeiten seiner Elementarereignisse**.

   Beispiel bezogen auf die gezinkte Münze:

   $$P(\text{„}\mathit{mindestens\ einmal\ Kopf}\text{“}) = P(\text{„}KK\text{“})+P(\text{„}KZ\text{“})+P(\text{„}ZK\text{“})$$
   $$= 0{,}16+0{,}24+0{,}24 = 0{,}64$$

3. Urnenmodelle:

Das mehrmalige Ausführen des gleichen Zufallsexperiments lässt sich häufig mit Hilfe eines der beiden folgenden **Urnenmodelle** simulieren.

a) **Ziehen mit Zurücklegen**:
Aus einer Urne, die verschiedenfarbige Kugeln enthält, wird mehrmals eine Kugel gezogen, ihre Farbe notiert und anschließend wieder zurück in die Urne gelegt. Damit ändert sich die Zusammensetzung der Kugeln in der Urne nicht (**Ziehen mit Zurücklegen**).
Beispielsweise kann das Werfen der oben beschriebenen gezinkten Münze durch eine Urne mit 10 Kugeln, davon 4 rote (=Kopf) und 6 blaue (=Zahl) simuliert werden.

b) **Ziehen ohne Zurücklegen:**
Aus der Urne wird jeweils eine Kugel entnommen und deren Farbe notiert. Danach wird die Kugel aber beiseite gelegt. Dadurch verändert sich bei jedem Schritt der Inhalt der Urne. (**Ziehen ohne Zurücklegen**)

Beispiel:
Zweimaliges Ziehen aus einer Urne mit 10 Kugeln (4 roten, 6 blauen) ohne Zurücklegen.

Nach dem ersten Mal befinden sich nur noch 9 Kugeln in der Urne, was sich auf die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten auswirkt.